DIE STERN - DREIECK TRANSFORMATION

Stern nach Dreieck: Für den Widerstand zw. Knoten x und z gilt:

$$R_{xz} = \frac{R_1\left(R_2+R_3\right)}{R_1+R_2+R_3} = R_c + R_b \Leftrightarrow \frac{R_1\left(R_2+R_3\right)}{R_1+R_2+R_3} - R_c = R_b \;...(1)$$

entsprechend zwischen den anderen Knoten:

$$R_{xy} = \frac{R_2\left(R_1+R_3\right)}{R_1+R_2+R_3} = R_c + R_a \Leftrightarrow \frac{R_2\left(R_1+R_3\right)}{R_1+R_2+R_3} - R_a = R_c \;...(2)$$

$$R_{yz} = \frac{R_3\left(R_1+R_2\right)}{R_1+R_2+R_3} = R_a + R_b \Leftrightarrow \frac{R_3\left(R_1+R_2\right)}{R_1+R_2+R_3} - R_b = R_a \;...(3)$$

Gleichung (1) in (3) ergibt:

$$\frac{R_3\left(R_1+R_2\right)}{R_1+R_2+R_3} - \frac{R_1\left(R_2+R_3\right)}{R_1+R_2+R_3} + R_c = R_a$$

schließlich setzen wir noch Gleichung (2) ein:

$$\frac{R_3\left(R_1+R_2\right)}{R_1+R_2+R_3} - \frac{R_1\left(R_2+R_3\right)}{R_1+R_2+R_3} + \frac{R_2\left(R_1+R_3\right)}{R_1+R_2+R_3} - R_a = R_a$$

$$2R_a = \frac{R_1R_3 + R_2R_3 - R_1R_2 - R_1R_3 + R_1R_2 + R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

Nun heben sich die Widerstandspaare R_1R_3 und R_1R_2 auf und die zwei kürzt sich auch noch weg, so daß wir folgende Formel erhalten:

$$R_a = \frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

Für die zwei anderen Widerstände muß man natürlich genau gleich vorgehen.

Dreieck nach Stern: Hierfür betrachte ich den Widerstand zwischen Knoten x und den (gedanklich) kurzgeschlossenen Knoten (y,z). Dann liegt $R_1 \parallel R_2$:

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = R_c + \frac{R_aR_b}{R_a+R_b} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_c+\frac{R_aR_b}{R_a+R_b}} - \frac{1}{R_2} \quad ...(1)$$

Wenn ich den Widerstand zwischen Knoten y und (x,z) bzw. Knoten z und (x,y) genauso bestimme bekomme ich folgende Gleichungen:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_a+\frac{R_bR_c}{R_b+R_c}} - \frac{1}{R_3} \quad ...(2)$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_b+\frac{R_aR_c}{R_a+R_c}} - \frac{1}{R_1} \quad ...(3)$$

nun setze ich (2) in (1) ein:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_c+\frac{R_aR_b}{R_a+R_b}} - \frac{1}{R_a+\frac{R_bR_c}{R_b+R_c}} + \frac{1}{R_3}$$

Mit (3) erhalte ich schließlich:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_c+\frac{R_aR_b}{R_a+R_b}} - \frac{1}{R_a+\frac{R_bR_c}{R_b+R_c}} + \frac{1}{R_b+\frac{R_aR_c}{R_a+R_c}} - \frac{1}{R_1}$$

Nun bringe ich endlich die Brüche auf ihren Hauptnenner:

$$\frac{2}{R_1} = \frac{1}{\frac{R_c(R_a+R_b)+R_aR_b}{R_a+R_b}} - \frac{1}{\frac{R_a(R_b+R_c)+R_bR_c}{R_b+R_c}} + \frac{1}{\frac{R_b(R_a+R_c)+R_aR_c}{R_a+R_c}}$$

$$\frac{2}{R_1} = \frac{R_a+R_b}{R_aR_b+R_bR_c+R_aR_c} - \frac{R_b+R_c}{R_aR_b+R_bR_c+R_aR_c} + \frac{R_a+R_c}{R_aR_b+R_bR_c+R_aR_c}$$

$$\frac{2}{R_1} = \frac{R_a+R_b-R_b-R_c+R_a+R_c}{R_aR_b+R_bR_c+R_aR_c}$$

$$\frac{2}{R_1} = \frac{2R_a}{R_aR_b+R_bR_c+R_aR_c}$$

Nun noch den Bruch umkehren und wir haben die Gleichung:

$$R_1 = \frac{R_aR_b+R_bR_c+R_aR_c}{R_a}$$

Für die anderen Widerstände R_2 und R_3 gilt wieder entsprechendes.